Matematika

A középfokú képzés során a matematika tanulása-tanítása tekintetében az egyik legfontosabb feladat a tanuló önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának kialakítása, fejlesztése. A 9. évfolyamtól kezdve a spirális felépítésnek megfelelően – a korábbi képzési szakaszok során megszerzett készségekre, képességekre és ismeretekre alapozva – egyre absztraktabb formában épül fel a matematika belső struktúrája (fogalmak definíciója, tételek, bizonyítások).

Az 1–4. és 5–8. évfolyamos képzés nevelési-oktatási szakaszait jellemző tanuláshoz és tanításhoz képest a 9–12. évfolyamokon fokozatosan hangsúlyosabbá válik a matematika deduktív jellege. Az új fogalmakat, algoritmusokat, ismereteket viszont továbbra is induktív módon, szemléltetéssel, felfedeztetéssel, tanulói tevékenységekre építve, a valósághoz kapcsolva kell bevezetni.

Jól megválasztott problémák tárgyalása során válik a tanulók számára is szükségessé az új fogalmak bevezetése és pontos definiálása. Tanári irányítással a tételek, általános összefüggések is felfedeztethetők a tanulókkal. Ezen folyamat során fejlődik a tanulók szintetizáló és modellalkotó képessége. A felfedezett tételek és összefüggések egy része bizonyítás nélkül is gyarapítja a matematikai eszköztárat. Néhány tétel bizonyítása azonban elengedhetetlen része a matematika tanításának, hiszen a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése. Az új fogalmak megalkotása, az összefüggések, stratégiák felfedezése és az ismereteknek feladatok, problémák megoldása során történő tudatos alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a meglévő ismeretek mobilizálásának képességét, valamint a problémamegoldó gondolkodás eltérő típusainak adekvát használatát. Ennek a folyamatnak az eredményeképpen a tanuló meg tudja állapítani adott állítás, tétel érvényességi és alkalmazási körét, megállapításai, állításai mellett logikusan tud érvelni. A matematika tanulásának-tanításának egyik fő célja, hogy fejlődjön a tanuló mérlegelő gondolkodása, az adatok elemzését, szintézisét és értékelését lehetővé tevő készségek és képességek rendszere. A matematikai játékok, logikai feladványok fejlesztik a stratégiaalkotást, az algoritmikus gondolkodást, a kreativitást és a gondolkodás rugalmasságát.

Ebben a nevelési-oktatási szakaszban az ismert számok köre az irracionális számokkal bővül, valamint új műveletek bevezetésére és már ismert műveletek alaphalmazának bővítésére kerül sor a permanenciaelv alapján. Ezen folyamat során a tanuló egyre inkább képes lesz rá, hogy változatos matematikai objektumokat jelölő szimbólumokkal végezzen műveleteket.

A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technika és a humán tanulási területek ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák, a természeti és a gazdasági folyamatok értelmezéséhez és kezeléséhez. Ehhez – több más fogalom mellett – szükséges a függvény fogalmának változatos (nemcsak számhalmazokon értelmezett) példák mentén történő kiterjesztése.

A tanuló a matematika szaknyelvét érti és tudatosan használja. Életkorának megfelelő matematikai, matematikatörténeti szöveget képes önállóan olvasni, értelmezni. Mind írásban, mind szóban képes gondolatait a matematika szaknyelvének szabatos alkalmazásával közölni. A tanuló különböző forrásokat (tankönyv, függvénytáblázat, saját jegyzet, digitális források) használhat az órákon és a számonkérések alkalmával, bizonyos tételek, azonosságok, képletek felidézésére.

A tanuló társaival közösen tervez és hajt végre kooperatív tevékenységeket, projekteket. A közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét.

Ebben az életkorban is érvényesülnie kell a tanuló érdeklődésének, adottságának, absztrakciós szintjének megfelelő differenciálásnak. Ez a differenciálás jelentheti a Nat-ban leírt tananyagtartalmaknak a lehetőségekhez igazított bővítését is.

A tanuló digitális eszközöket, a tanulást, a szemléltetést, a tapasztalatszerzést és a felfedezést segítő szoftvereket, digitális információforrásokat használ, a matematika alkalmazását segítő számítógépes programokat ismer meg. Aktív résztvevője a tanulási-tanítási folyamatnak, ami lehetővé teszi azon kompetenciáinak és tervezési stratégiáinak a fejlődését, amelyek segítik a mai gyorsan változó világban való eligazodást és a különböző élethelyzetekben előforduló problémák megoldását.

A matematika tantárgy a Nemzeti alaptantervben rögzített kulcskompetenciákat az alábbi módon fejleszti:

**A tanulás kompetenciái:** A matematika tanulása során elengedhetetlen a tananyag alapos és átfogó megértése. A szöveges feladatok megoldása fejleszti az értő olvasás és a releváns információk kiválasztásának készségét. Az általánosítás és az analógiák adekvát használata, több szempont egyidejű figyelembevétele, a rendszerezési képesség, a megszerzett tudás új helyzetekben való alkalmazása elősegítik az aktív, önirányított tanulás kompetenciáinak kialakítását, fenntartását, megerősítését. A matematika tantárgy a matematikai logika és az algoritmikus gondolkodás fejlesztésével, az ok-okozati összefüggések megláttatásával hozzájárul a többi tantárgy tanulásához szükséges rendszerező, összefüggéseket felismerő, ezáltal hatékony önálló tanulási módszerek elsajátításához és megfelelő alkalmazásához is.

**A kommunikációs kompetenciák:** A matematika fejleszti a tanuló azon képességét, hogy világosan, röviden és pontosan fejezze ki gondolatait. A matematika tanulása során fokozatosan alakul ki a tanuló érvelési és vitakészsége. A szöveges problémák megoldása javítja a szöveg megértésének készségét: a tanulónak meg kell keresnie az információkat és fel kell ismernie egy adott információ jelentőségét a probléma megoldása során. A matematika tanulási folyamatában kialakul a különböző módon (szöveg, grafikon, táblázat, diagram és képlet) bemutatott tartalmak megértésének és alkotásának készségrendszere.

**A digitális kompetenciák:** A matematika tanulása során hangsúlyos szerepet kap a problémamegoldás és az algoritmikus gondolkodás, melyek elősegítik a tanuló digitális kompetenciáinak fejlesztését. A különböző matematikai tárgyú szoftverek, alkalmazások, applikációk és játékok alkalmazásán keresztül a matematika tanulása hozzájárul a tanuló digitális kultúrájának kialakításához.

**A matematikai, gondolkodási kompetenciák:** A matematika tanulása során a tanuló gondolkodásának fejlesztése elsősorban konkrét problémák megoldásán keresztül történik. A tanuló előzetes tudása és tapasztalata alapján azonosítja a problémákat, majd ismert matematikai fogalmakra támaszkodva stratégiát dolgoz ki ezek megoldására. Elfogadja, hogy a megoldás több különböző úton is elképzelhető, illetve találkozik olyan nyitott problémákkal is, amelyeknek több megoldása is lehetséges. Kellő kitartással próbál ki különböző matematikai módszereket, és felismeri azokat a problémákat is, amelyeknek nincs megoldása.

A tanuló mérlegelő gondolkodásának fejlesztése többek között a feladatok megoldása során kapott eredmények elemzésén és értékelésén keresztül történik. A tanuló megtanul induktív úton példákat általánosítani és deduktív érvelést használni a matematikai állítások bizonyítására.

**A személyes és társas kapcsolati kompetenciák:** A matematika tanulása fejleszti a kitartás, a pontosság, a figyelem és a fegyelmezettség képességét. A matematika tanulásán keresztül erősödik a tanuló felelősségtudata, gazdagodik az önképe, fejlődik a kooperációs készsége. A tanuló matematikai ismereteit alkalmazni tudja az egyéni célok eléréséhez szükséges tervezésben, az életét befolyásoló döntései megalapozásában és meghozatalában, a várható következmények mérlegelésében. A matematika tanulása elősegíti annak belátását, hogy a személyes erősségekre építeni, a hibákból pedig tanulni lehet.

A tanuló a matematikai foglalkozások során megtanulja, hogyan oszthatja meg ötleteit másokkal, és hogyan segítheti társait a matematikai fogalmak megértése vagy azok alkalmazása során. Felelősséget vállal a közösen kitűzött feladatok elvégzéséért, s megtanulja tisztelni mások álláspontját, gondolkodásmódját.

**A kreativitás, a kreatív alkotás, önkifejezés és kulturális tudatosság kompetenciái:** A matematika olyan tudomány, amely összeköti a különböző kultúrákat. A tanuló megismeri a gondolkodás logikai felépítésének eleganciáját, a matematikának a természethez, a művészetekhez és az épített környezethez fűződő viszonyát.

A tanuló konkrét vagy képi reprezentációval vagy szimbolikus modellekkel végzi a matematikai gondolatok vagy kapcsolatok feltárását, majd új kapcsolatokat alakít ki a matematikai fogalmak között.

**Munkavállalói, innovációs és vállalkozói kompetenciák:** A kompetencia fejlesztése valódi adatok felhasználásával összeállított mindennapi problémák megoldásán keresztül történik. Ennek során a különböző megoldási lehetőségek keresése fejleszti a gondolkodás rugalmasságát és az új ötletek megalkotásának képességét. A tanuló megfelelő játékokon keresztül képessé válik a különböző kockázatok felmérésére, a számára kedvezőnek tűnő stratégia kidolgozására, és megtapasztalja döntései következményét. A matematikai projektekben való részvétel segíti a későbbi munkavállalás szempontjából fontos készségek kialakulását (kreativitás, problémamegoldás, kezdeményezőkészség, másokkal való együttműködés készsége).

9–10. évfolyam

A 9–10. évfolyamon a korábbi képzési szakaszok során megszerzett ismeretekre és kialakított készségekre, képességekre alapozva – a spirális tananyagfelépítést szem előtt tartva – az egyes témakörök új ismeretei matematikai szempontból egyre pontosabb és elvontabb formában jelennek meg a tanulási-tanítási folyamat során. Egyre határozottabb a fogalmak pontos definiálásának, az állítások, tételek indoklásának, bizonyításának, valamint az általánosításnak az igénye. Erre a szakaszra fokozottan jellemző a korábbi és az új ismeretek egységes rendszerbe foglalása, az egyes témakörökön belüli rendszerezés.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló – a lehetőségekhez mérten – a tanár által irányított módon, feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok fejlesztik a matematikai kommunikációt. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést és a felfedeztetést.

A 9–10. évfolyamon megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Ebben a szakaszban jelennek meg először a valós számok; elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek; másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek; a függvény fogalma, függvénytulajdonságok; a kör és részei. Vannak olyan témakörök, amelyek megjelennek más területek tanítása során is, ezért a tananyag egyes részeihez javasolt óraszámok nem feltétlenül jelentenek időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése lehetővé teszi a hétköznapi vagy matematikai nyelven megfogalmazott problémák és a megoldás során alkalmazott matematikai modellek körének bővülését.

9. évfolyam

**A témakörök áttekintő táblázata:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Témakör neve** | **Óraszám** |
| **Halmazok** | 15 |
| **Kombinatorika, gráfok** | 18 |
| **Számhalmazok, műveletek** | 12 |
| **Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során** | 15 |
| **Arányosság, százalékszámítás** | 10 |
| **Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek** | 25 |
| **A függvény fogalma, függvénytulajdonságok** | 20 |
| **Geometriai alapismeretek** | 10 |
| **Háromszögek** | 15 |
| **Négyszögek, sokszögek** | 10 |
| **Transzformációk, szerkesztések** | 15 |
| **Év végi ismétlés** | 15 |
| **Összes óraszám:** | 180 |
|  |  |

Témakör: **Halmazok**

óraszám: **15 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
* véges halmazok elemszámát meghatározza;
* alkalmazza a logikai szita elvét.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* adott halmazt diszjunkt részhalmazaira bont, osztályoz;
* halmazokat különböző módokon megad;
* halmazokkal műveleteket végez, azokat ábrázolja és értelmezi.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Halmaz közös elem nélküli részhalmazokra bontása, példák ennek alkalmazására a matematikán belül, más tantárgyaknál és a mindennapi életben
* Halmaz megadása utasítással, elemek felsorolásával
* Halmazok közötti viszonyok ábrázolása, értelmezése
* Halmazok metszetének, uniójának, különbségének, komplementerének képzése, ábrázolása és értelmezése
* Két-három halmaz elemszámával kapcsolatos feladatok megoldása logikai szita segítségével
* Szemléletes kép végtelen halmazokról

### Fogalmak

alaphalmaz, részhalmaz, üres halmaz, halmazok egyenlősége, Venn-diagram; halmazműveletek: unió, metszet, különbség, komplementer halmaz; diszjunkt halmazok, halmaz elemszáma, logikai szita

### Javasolt tevékenységek

* Hétköznapi életből, más tantárgyakból vagy a matematikából vett, konkrétan vagy digitálisan megjelenített alaphalmazból megadott tulajdonságokkal rendelkező elemek válogatása
* Konkrét részhalmaz esetén a részhalmaz képzési szempontjainak megállapítása
* A történelem, a művészetek, a tudományok, a sport neves személyiségeinek kitalálása különböző tulajdonságok alapján
* Barkochba játék
* A „végtelen szálloda” mint modell
* Megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazok elemei között egyértelmű hozzárendelés felfedeztetése, például a pozitív természetes számok halmazának számossága megegyezik a pozitív páros számok halmazának számosságával

Témakör: **Kombinatorika, gráfok**

óraszám: **18 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
* a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
* a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
* megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
* konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével;
* véges halmazok elemszámát meghatározza;
* alkalmazza a logikai szita elvét.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Hétköznapi helyzetekhez kapcsolódó sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezéssel
* Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása matematikai problémákban
* Esetszétválasztás és szorzási elv alkalmazása feladatok megoldásában
* Összeszámlálási modellek alkalmazása feladatok megoldásában
* Gráfok alkalmazása konkrét hétköznapi és matematikai szituációk szemléltetésére, feladatok megoldására

### Fogalmak

gráf, gráf csúcsa, gráf éle

### Javasolt tevékenységek

* Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezett leszámlálással és a szorzási és/vagy esetszétválasztási elv alkalmazásával
* Geometriai eszközök használata kombinatorikai problémák megoldására
* Néhány feltételt tartalmazó tanulói órarend készítése kis elemszámmal
* Azonos modellen alapuló, de különböző megfogalmazású feladatok megoldása
* Szorzat vagy összeg alakban megadott eredményű kombinatorikafeladatokhoz saját szöveg írása
* Téves megoldású kombinatorikafeladatokban a hiba megtalálása és a tévedés kijavítása
* Sorba rendezési feladatok megoldásának szemléltetése gráffal
* Adott gráfhoz hozzáillő feladatszöveg alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában

Témakör: **Számhalmazok, műveletek**

óraszám: **12 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
* ismer példákat irracionális számokra.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* a kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás műveleti azonosságokat helyesen alkalmazza különböző számolási helyzetekben;
* racionális számokat tizedes tört és közönséges tört alakban is felír;
* ismeri a valós számok és a számegyenes kapcsolatát;
* ismeri és alkalmazza az abszolút érték, az ellentett és a reciprok fogalmát;
* a számolással kapott eredményeket nagyságrendileg megbecsüli, és így ellenőrzi az eredményt;
* valós számok közelítő alakjaival számol, és megfelelően kerekít.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Műveleti azonosságok (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás), zárójelek helyes használata
* Tizedes törtek átírása közönséges tört alakba és viszont
* Irracionális számok szemléltetése
* Racionális számok elhelyezkedése számegyenesen
* Nyílt és zárt intervallumok fogalmának ismerete és alkalmazása
* Számok abszolút értékének, ellentettjének és reciprokának meghatározása
* Számológéppel elvégzett számítások eredményének előzetes becslése és nagyságrendi ellenőrzése
* Valós számok adott jegyre kerekítése
* Valós számok gyakorlati helyzetekben történő észszerű kerekítése

### Fogalmak

racionális szám, irracionális szám, valós szám, nyílt intervallum, zárt intervallum, abszolút érték, ellentett, reciprok

### Javasolt tevékenységek

* A számológép helyes használatának elsajátítása, például műveleti sorrend, zárójelek
* Írásban elvégzett műveletek ellenőrzése számológéppel
* Célszám megközelítése adott számjegyekkel, műveleti jelek és zárójelek használatával
* Tanulói kiselőadás a helyi értékes számírás kialakulásáról, a számjegyek kialakulásának történetéről
* A tanteremben vagy a tanterem környezetében végzett mérések esetén a megfelelő kerekítés alkalmazása
* Adott mérés elvégzése esetén a mérési hiba következményeinek vizsgálata

Témakör: **Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során**

óraszám: **15 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* műveleteket végez algebrai kifejezésekkel;
* ismer és alkalmaz egyszerű algebrai azonosságokat;
* átalakít algebrai kifejezéseket összevonás, szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok alkalmazásával.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Műveletek egyszerű algebrai kifejezésekkel: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, egytagú kifejezések hatványa
* Műveleti azonosságok ismerete és alkalmazása egyenletek megoldása során
* Az (*a* + *b*)2, az (*a* – *b*)2 és az (*a* + *b*)(*a* – *b*) kifejezésekre vonatkozó nevezetes azonosságok ismerete és alkalmazása (például oszthatósági feladatokban, egyenletek megoldásában, függvények ábrázolásában)
* Egyszerű másodfokú polinom átalakítása teljes négyzetté kiegészítéssel
* Algebrai kifejezések átalakítása összevonás, szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok alkalmazásával

### Fogalmak

összeg, tag, szorzat, tényező, egynemű kifejezés, együttható, teljes négyzet, polinom

### Javasolt tevékenységek

* „Gondolj egy számra, és én kitalálom” játék, matematikai bűvésztrükkök algebrai magyarázata
* Algebrai kifejezésekkel végzett műveletek geometriai modellezése
* A nevezetes azonosságok geometriai megjelenítése
* Számolási „trükkök” a nevezetes azonosságok segítségével, például kétjegyű számok négyzetének, 99 · 101 típusú szorzat eredményének kiszámolása fejben

Témakör: **Arányosság, százalékszámítás**

óraszám: **10 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
* ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismeri és alkalmazza az egyenes és a fordított arányosságot.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Az egyenes és a fordított arányosság fogalmának ismerete és alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során
* Az egyenes és a fordított arányosság grafikonjának felismerése és elkészítése
* Példák az egyenes és a fordított arányosságtól különböző arányosságokra (négyzetes, gyökös)
* Példák egy irányban vagy ellentétes irányban változó mennyiségpárokra a mindennapi életből
* Százalékszámítással kapcsolatos hétköznapi helyzetekhez (például háztartási bevételekhez, kiadásokhoz, pénzügyi fogalmakhoz, gazdasági folyamatokhoz) és más tantárgyakhoz köthető feladatok megoldása

### Fogalmak

egyenes arányosság, fordított arányosság, százalékalap, százalékérték, százalékláb

### Javasolt tevékenységek

* Összetett, valódi élethelyzetekkel kapcsolatos feladatok megoldása csoportmunkában, szükség esetén grafikon segítségével
* Háztartási számlák elemzése az azokon megjelenő egységárak és fizetendő összegek figyelembevételével

Témakör: **Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek**

óraszám: **25 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
* adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
* a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
* a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
* a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
* felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
* egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismeri és alkalmazza a következő egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, szorzattá alakítás;
* megold elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket, elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszereket.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Elsőfokú egyenletre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
* Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
* A problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
* A kiválasztott modellben a probléma megoldása
* A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti problémába visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve
* Alaphalmaz, megoldáshalmaz fogalmának ismerete
* Egyismeretlenes elsőfokú egyenlet és egyenlőtlenség megoldása mérlegelvvel és grafikusan
* Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása behelyettesítéssel, közös együtthatók módszerével, grafikusan
* Elsőfokú egyenlettel, egyenlőtlenséggel, egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok megoldása (például út-idő-sebesség, közös munkavégzés, keveréses feladatok, pénzügyi és gazdasági tematikájú feladatok)

### Fogalmak

alaphalmaz, megoldáshalmaz, mérlegelv

### Javasolt tevékenységek

* Szöveges feladatok megoldása több különböző úton, a különböző megoldások összehasonlítása előnyök és hátrányok szempontjából
* Hiányos, túlhatározott, illetve ellentmondó adatokat tartalmazó problémák vizsgálata
* Nyílt végű problémák megoldása
* Adott egyenlethez szöveges feladat alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában
* Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek grafikus megoldása során; a digitális eszközzel történő ábrázolás előnyeinek és hátrányainak megbeszélése

Témakör: **A függvény fogalma, függvénytulajdonságok**

óraszám: **20 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
* adott értékkészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* megad hétköznapi életben előforduló hozzárendeléseket;
* adott képlet alapján helyettesítési értékeket számol, és azokat táblázatba rendezi;
* táblázattal megadott függvény összetartozó értékeit ábrázolja koordináta-rendszerben;
* a grafikonról megállapítja függvények alapvető tulajdonságait.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Hétköznapi hozzárendelések megfigyelése, tulajdonságainak megfogalmazása: egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű
* Függvény megadása, alapvető függvénytani fogalmak ismerete
* Függvényértékek meghatározása és táblázatba rendezése
* Függvények ábrázolása táblázat alapján
* Függvények alkalmazása valós, hétköznapi helyzetek jellemzésére, gyakorlati problémák megoldására
* A grafikon alapján a függvény értelmezési tartományának, értékkészletének, minimumának, maximumának és zérushelyének megállapítása, a növekedés és fogyás leolvasása
* Lineáris függvény, másodfokú függvény, négyzetgyökfüggvény, fordított arányosságot leíró függvény (elemi függvények) grafikonja, tulajdonságai
* Elemi függvényekkel egyszerű függvénytranszformációs lépések végrehajtása: *f*(*x*) + *c*, *f*(*x* + *c*), *c*·*f*(*x*), |*f*(*x*)|
* Lineáris függvények hozzárendelési utasításának leolvasása grafikon alapján
* Egyszerű függvények esetén az *f*(*x*) = *c* alapján *x* meghatározása és ennek alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során
* Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés megfordítása és a megfordított hozzárendelés ábrázolása

### Fogalmak

egyértelmű hozzárendelés, kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, értelmezési tartomány, képhalmaz, értékkészlet, helyettesítési érték, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás

### Javasolt tevékenységek

* Összetett, valódi helyzetekkel, például demográfiai kérdésekkel, pénzügyi feladatokkal kapcsolatos grafikonok elemzése csoportmunkában
* Hétköznapi helyzetekben időben változó folyamatokkal kapcsolatos mérések végzése és a mért adatok ábrázolása koordináta-rendszerben (például hőmérséklet)
* A tanulók mindennapi életéhez kapcsolódó grafikonok ábrázolása és elemzése (például út-idő grafikon az iskolába való eljutásról)
* Egyszerű, másodfokú függvénnyel jellemezhető, gyakorlati helyzethez köthető szélsőérték-feladatok megoldása csoportmunkában, például adott hosszúságú spárgával bekeríthető maximális területű téglalap adatainak mérése, megfigyelése
* Függvények ábrázolása digitális eszköz segítségével
* Barkochba játék a függvényekkel kapcsolatos fogalmak használatával
* Szöveges feladatok megoldása grafikus úton
* Algebrai úton nem vagy nehezen megoldható egyenletek közelítő megoldása grafikus úton digitális eszköz segítségével

Témakör: **Geometriai alapismeretek**

óraszám: **10 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
* felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismeri és használja a pont, egyenes, sík (térelemek) és szög fogalmát;
* ismeri és alkalmazza a nevezetes szögpárok tulajdonságait;
* ismeri az alapszerkesztéseket, és ezeket végre tudja hajtani hagyományos vagy digitális eszközzel.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Két pont, pont és egyenes, két egyenes távolságának alkalmazása a síkban
* Egyenesek kölcsönös helyzetének ismerete és alkalmazása
* Nevezetes szögpárok tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: pótszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúcsszögek, egyállású szögek, váltószögek
* A szakaszfelező merőleges és a szögfelező mint ponthalmazok tulajdonságainak ismerete
* Dinamikus geometriai szoftver alkalmazásának előkészítése, használata
* Alapszerkesztések végrehajtása hagyományos vagy digitális eszközzel euklideszi módon: szakaszfelező merőleges, szögfelező, merőleges és párhuzamos egyenesek szerkesztése, szög másolása

### Fogalmak

pont, egyenes, sík, szögtartomány, hajlásszög, párhuzamos, merőleges, pótszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúcsszögek, egyállású szögek, váltószögek, szakaszfelező merőleges, szögfelező

### Javasolt tevékenységek

* Az osztályteremben vagy a terem környezetében „egyenesek” kölcsönös helyzetének megadása, ezek távolságának megmérése
* Számszerű adatként csak a méretarányt tartalmazó térkép alapján valódi távolságok meghatározása, becslése
* Számszerű adatként csak méretarányt tartalmazó térképen adott helységektől (közelítőleg) egyenlő távolságra levő helységek megkeresése

Témakör: **Háromszögek**

óraszám: **15 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
* ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
* sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
* kiszámítja háromszögek területét.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismeri és alkalmazza a háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei közötti kapcsolatokat; a speciális háromszögek tulajdonságait;
* ismeri és alkalmazza a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmakat és tételeket;
* ismeri és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* A háromszögek csoportosítása oldalak és szögek szerint
* Az alapvető összefüggések ismerete és alkalmazása háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között
* Speciális háromszögek tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: szabályos, egyenlő szárú, derékszögű háromszög
* A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmak, tételek ismerete és alkalmazása: oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt, illetve beírt kör
* Az oldalfelező merőlegesek és a belső szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tétel bizonyítása
* A Pitagorasz-tétel és megfordításának ismerete és alkalmazása
* A Pitagorasz-tétel bizonyítása
* Háromszög területének kiszámítása

### Fogalmak

szabályos háromszög, egyenlő szárú háromszög, derékszögű háromszög, oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt kör, beírt kör

### Javasolt tevékenységek

* A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó tételek felfedeztetése szerkesztéssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával, páros vagy csoportmunkában
* Konkrét alakzatok átdarabolása más alakzattá páros vagy csoportmunkában
* A derékszögű háromszög oldalaira szerkesztett négyzetek átdarabolása a Pitagorasz-tételnek megfelelő módon, pitagoraszi tangramok vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával

Témakör: **Négyszögek, sokszögek**

óraszám: **10 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
* ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
* sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
* ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
* átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismeri és alkalmazza a szabályos sokszög fogalmát; kiszámítja a konvex sokszög belső és külső szögeinek összegét.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Speciális négyszögek (trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet) tulajdonságainak ismerete, területének kiszámítása
* Konvex sokszögeknél az átlók számára, a belső és külső szögösszegre vonatkozó tételek ismerete, bizonyítása és alkalmazása
* Szabályos sokszög fogalmának ismerete
* Szabályos sokszög területe átdarabolással

### Fogalmak

trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet, konvex sokszög, szabályos sokszög

### Javasolt tevékenységek

* Különböző típusú speciális négyszögek területének meghatározására vonatkozó formula felfedeztetése átdarabolással
* A belső és a külső szögösszegre vonatkozó tételek felfedeztetése, illusztrálása átdarabolással, hajtogatással vagy dinamikus geometriai szoftver segítségével

Projektmunka: lakás/iskola alaprajzának elkészítése méretarányosan

Témakör: **Transzformációk, szerkesztések**

óraszám: **15 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismer példákat geometriai transzformációkra;
* ismeri és alkalmazza a síkbeli egybevágósági transzformációkat és tulajdonságaikat; alakzatok egybevágóságát;
* megszerkeszti egy alakzat tengelyes, illetve középpontos tükörképét, pont körüli elforgatottját, párhuzamos eltoltját hagyományosan és digitális eszközzel;
* geometriai szerkesztési feladatoknál vizsgálja és megállapítja a szerkeszthetőség feltételeit.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Példák ismerete geometriai hozzárendelésekre (merőleges vetítés, párhuzamos vetítés)
* A tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás ismerete, tulajdonságaik
* A vektor fogalmának kialakítása a párhuzamos eltolás segítségével
* Egybevágósági transzformációk egymás utáni végrehajtása
* Egybevágósági transzformációk végrehajtása szerkesztéssel vagy digitális eszközzel
* Egybevágó alakzatok, szimmetriák megfigyelése a környezetben, művészeti alkotásokban
* Az egybevágósági transzformációk alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában
* Háromszögek egybevágóságának alapesetei és ezek alkalmazása
* Négyszögek egybevágósága
* Egyszerű szerkesztési feladatok megoldása hagyományos vagy digitális eszközzel; diszkusszió
* Gyakorlati feladatok megoldása egybevágóságok segítségével (például a sík parkettázása különféle síkidomokkal; szabásminta készítése, használata)

### Fogalmak

tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli forgatás, párhuzamos eltolás, egybevágóság, forgásszög

### Javasolt tevékenységek

* Gyakorlati példák keresése geometriai hozzárendelésekre, például fényképezés, filmvetítés
* A középpontos tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás bemutatása mint két tengelyes tükrözés egymásutánja
* M. C. Escher és Victor Vasarely néhány interneten is elérhető alkotásának elemzése a szimmetriák szempontjából; hasonló módszerrel képek alkotása
* A sík parkettázása egybevágó háromszögekkel, négyszögekkel papírsablonok vagy dinamikus geometriai szoftver segítségével
* A tengelyes vagy középpontos szimmetriára alapozó stratégiai játékok (például pénzforgatós, színezős) páros munkában

10.-évfolyam

A témakörök áttekintő táblázata:

|  |  |
| --- | --- |
| **Témakör neve** | **Óraszám** |
| **Matematikai logika** | 15 |
| **Hatvány, gyök** | 20 |
| **Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek** | 30 |
| **A másodfokú függvény fogalma, függvénytulajdonságok** | 10 |
| **A kör és részei** | 15 |
| **Transzformációk, szerkesztések** | 25 |
| **Leíró statisztika** | 15 |
| **Valószínűség-számítás** | 15 |
| **Trigonometria** | 20 |
| **Év végi ismétlés** | 15 |
| **Összes óraszám:** | 180 |

Témakör: **Matematikai logika**

óraszám: **15 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
* megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
* tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* adott állításról eldönti, hogy igaz vagy hamis;
* alkalmazza a tagadás műveletét egyszerű feladatokban;
* ismeri és alkalmazza az „és”, a (megengedő és kizáró) „vagy” logikai jelentését;
* megfogalmazza adott állítás megfordítását;
* helyesen használja a „minden” és „van olyan” kifejezéseket.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* A matematikai bizonyítás fogalma
* Állítás logikai értékének megállapítása (igaz vagy hamis)
* Állítás tagadásának alkalmazása egyszerű feladatokban
* A „nem”, az „és”, a megengedő „vagy” és a kizáró „vagy” logikai jelentésének ismerete és alkalmazása matematikai és matematikán kívüli feladatokban
* A „minden” és a „van olyan” típusú állítások logikai értékének megállapítása és ennek indoklása egyszerű esetekben
* Adott állítás megfordításának megfogalmazása
* „Ha…, akkor…” és „akkor és csak akkor” típusú egyszerű állítások logikai értékének megállapítása
* Stratégiai és logikai játékok

### Fogalmak

tétel, bizonyítás, igaz-hamis; „nem”, „és”, „vagy”, „vagy…, vagy…”, „ha…, akkor…”, „akkor és csak akkor”

### Javasolt tevékenységek

* „Bírósági tárgyalás”, ahol az osztály tanulói a védők és a vádlók egy állítás indoklására, cáfolására
* „Mit állít a szigetlakó?”, „Ki volt a tettes, ha...?” típusú feladatok eljátszása, megoldása csoportmunkában
* Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
* Stratégiai játékok, például egyszerű NIM játékok, táblás játékok
* Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

Témakör: **Hatvány, gyök**

óraszám: **20 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri és alkalmazza az n-edik gyök fogalmát;
* ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismeri és alkalmazza a négyzetgyök fogalmát és azonosságait;
* ismeri és alkalmazza az egész kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
* ismeri és alkalmazza a normálalak fogalmát.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Valós számok hatványozása pozitív egész kitevőre
* Hatványozás 0 és negatív egész kitevőre
* A hatványozás azonosságainak megfigyelése, felfedezése
* A hatványozás azonosságainak bizonyítása konkrét alapszám és tetszőleges pozitív egész kitevő esetén
* Számok normálalakja
* Számolás normálalak segítségével
* A négyzetgyök definíciója
* Nemnegatív számok négyzetgyökének megadása számológép segítségével
* A négyzetgyökvonás azonosságai

### Fogalmak

hatványalap, hatványkitevő, normálalak, négyzetgyök

### Javasolt tevékenységek

* Projektmunka: hányszor lehet félbehajtani egy nagyméretű papírt? Keresés az interneten, kísérlet végzése például egy teljes guriga vécépapírral
* Internetes forrásból származó, nagyon kicsi vagy nagyon nagy számokat tartalmazó cikkek valóságtartalmának megállapítása páros vagy csoportmunkában

Témakör: **Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek**

óraszám: **30 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
* adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
* a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
* a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
* a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
* felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
* egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* megold másodfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket; ismeri és alkalmazza a diszkriminánst, a megoldóképletet és a gyöktényezős alakot.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Másodfokú egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
* Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
* A problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
* A kiválasztott modellben a probléma megoldása
* A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti problémába visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve
* Egyenletek megoldása ekvivalens átalakításokkal
* Másodfokú egyenlet megoldása szorzattá alakítással, teljes négyzetté kiegészítéssel, megoldóképlettel és grafikusan
* Egyszerű másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása
* Másodfokú egyenlőtlenség megoldása grafikusan
* Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok megoldása
* 

### Fogalmak

másodfokú egyenlet megoldóképlete, diszkrimináns, gyöktényezős alak, ekvivalens átalakítás

### Javasolt tevékenységek

* Másodfokú egyenlet megoldása konkrét együtthatókkal és paraméterekkel, a lépéseket párhuzamosan végezve
* Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása során
* Tanulói kiselőadás tartása magasabb fokú egyenletek megoldásának történetéről, érdekességeiről

Témakör: **A másodfokú függvény fogalma, függvénytulajdonságok**

óraszám: **10 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
* adott értékkészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* megad hétköznapi életben előforduló hozzárendeléseket;
* adott képlet alapján helyettesítési értékeket számol, és azokat táblázatba rendezi;
* táblázattal megadott függvény összetartozó értékeit ábrázolja koordináta-rendszerben;
* a grafikonról megállapítja függvények alapvető tulajdonságait.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Hétköznapi hozzárendelések megfigyelése, tulajdonságainak megfogalmazása: egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű
* Függvény megadása, alapvető függvénytani fogalmak ismerete
* Függvényértékek meghatározása és táblázatba rendezése
* Függvények ábrázolása táblázat alapján
* Függvények alkalmazása valós, hétköznapi helyzetek jellemzésére, gyakorlati problémák megoldására
* A grafikon alapján a függvény értelmezési tartományának, értékkészletének, minimumának, maximumának és zérushelyének megállapítása, a növekedés és fogyás leolvasása
* Elemi függvényekkel egyszerű függvénytranszformációs lépések végrehajtása: *f*(*x*) + *c*, *f*(*x* + *c*), *c*·*f*(*x*), |*f*(*x*)|
* Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés megfordítása és a megfordított hozzárendelés ábrázolása

### Fogalmak

egyértelmű hozzárendelés, kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, értelmezési tartomány, képhalmaz, értékkészlet, helyettesítési érték, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás

### Javasolt tevékenységek

* Összetett, valódi helyzetekkel, például demográfiai kérdésekkel, pénzügyi feladatokkal kapcsolatos grafikonok elemzése csoportmunkában
* A tanulók mindennapi életéhez kapcsolódó grafikonok ábrázolása és elemzése (például út-idő grafikon az iskolába való eljutásról)
* Egyszerű, másodfokú függvénnyel jellemezhető, gyakorlati helyzethez köthető szélsőérték-feladatok megoldása csoportmunkában, például adott hosszúságú spárgával bekeríthető maximális területű téglalap adatainak mérése, megfigyelése
* Függvények ábrázolása digitális eszköz segítségével
* Barkochba játék a függvényekkel kapcsolatos fogalmak használatával
* Szöveges feladatok megoldása grafikus úton
* Algebrai úton nem vagy nehezen megoldható egyenletek közelítő megoldása grafikus úton digitális eszköz segítségével

Témakör: **A kör és részei**

óraszám: **15 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
* ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
* sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ki tudja számolni a kör és részeinek kerületét, területét;
* ismeri a kör érintőjének fogalmát, kapcsolatát az érintési pontba húzott sugárral;
* ismeri és alkalmazza a Thalész-tételt és megfordítását.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Annak ismerete és alkalmazása, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával
* Annak ismerete és alkalmazása, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körcikk területével
* Kör, körcikk, körgyűrű és körszelet területének és kerületének kiszámítása
* Annak ismerete és alkalmazása, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, és hogy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak
* A Thalész-tétel és megfordításának ismerete és alkalmazása
* A Thalész-tétel bizonyítása

### Fogalmak

középponti szög, körív, körcikk, körgyűrű, körszelet, érintőszakaszok

### Javasolt tevékenységek

* Annak felfedeztetése méréssel, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával; különböző méretű körök esetén a kapott adatok táblázatba foglalása
* A Thalész-tétel felfedeztetése szerkesztéssel, szögméréssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával

Témakör: **Transzformációk, szerkesztések**

óraszám: **25 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
* ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
* alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
* ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismer példákat geometriai transzformációkra;
* ismeri és alkalmazza a középpontos hasonlósági transzformációt, a hasonlósági transzformációt és az alakzatok hasonlóságát;

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Példák ismerete geometriai hozzárendelésekre (merőleges vetítés, párhuzamos vetítés, merőleges affinitás, térkép, fényképezés)
* A vektor fogalmának kialakítása a párhuzamos eltolás segítségével
* A középpontos hasonlósági transzformáció és a hasonlósági transzformáció ismerete, tulajdonságai
* A hasonlóság fogalmának ismerete és alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában
* Gyakorlati feladatok megoldása hasonlóság segítségével (például alaprajz-, térképkészítés, modellezés)

### Fogalmak

vektor, vektorok összege, középpontos hasonlósági transzformáció, hasonlósági transzformáció, hasonlóság, a hasonlóság aránya

### Javasolt tevékenységek

* Gyakorlati példák keresése geometriai hozzárendelésekre, például fényképezés, filmvetítés
* M. C. Escher és Victor Vasarely néhány interneten is elérhető alkotásának elemzése a szimmetriák szempontjából; hasonló módszerrel képek alkotása
* Az iskola közelében lévő magas épület (például templomtorony) magasságának meghatározása egy egyenes bot segítségével a bot és az épület árnyékának méréséből („Thalész-módszer”) csoportmunkában
* Valódi távolságok, valódi útvonalak hosszának meghatározása papíralapú térkép alapján

Témakör: **Leíró statisztika**

óraszám: **15 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
* hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
* felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* adatsokaságból adott szempont szerint oszlop- és kördiagramot készít hagyományos és digitális eszközzel.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Statisztikai adatok gyűjtésének tervezése
* Statisztikai adatok gyűjtése hagyományos és internetes forrásból
* Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése középértékekkel hagyományos és digitális eszközzel
* A kapott adatok értelmezése, értékelése, egyszerű statisztikai következtetések
* Oszlop- és kördiagram értelmezése, valamint készítése hagyományos és digitális eszközzel
* Konkrét adatsokaság ábrázolásához, statisztikai kérdés megválaszolásához a megfelelő diagramtípus kiválasztása
* Kördiagramból oszlopdiagram készítése és viszont
* Grafikus manipulációk felismerése és javítása diagramok esetén

### Fogalmak

oszlopdiagram, kördiagram, átlag, medián, módusz

### Javasolt tevékenységek

* Adatgyűjtés megtervezése, például forgalomszámlálás vagy iskolai felmérés előkészítése
* A megtervezett statisztikai adatgyűjtés lebonyolítása, az eredmények szemléltetése grafikonok segítségével, a kapott eredmények értékelő bemutatása tanulói kiselőadás formájában
* Különböző adatsokaságok esetében annak vizsgálata, hogy ezek jellemezhetők-e az ismert középértékekkel
* Érvelés a tanuló saját érdemjegyei alapján különböző statisztikai jellemzők segítségével a kedvezőbb év végi jegyért
* Különböző sportágak értékelési rendszerének és statisztikáinak bemutatása tanulói kiselőadás keretében
* Osztályok/tantárgyak eredményeinek összehasonlítása érdemjegyek és ezek középértékei alapján
* Csoportmunka keretében adott céllal készülő, megtévesztő oszlop- és kördiagramok készítése, ezek szóbeli értékelése, javítása

Témakör: **Valószínűség-számítás**

óraszám: **15 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* tapasztalatai alapján véletlen jelenségek jövőbeni kimenetelére észszerűen tippel;
* véletlen kísérletek adatait rendszerezi, relatív gyakoriságokat számol, nagy elemszám esetén számítógépet alkalmaz.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Valószínűségi kísérletek elvégzése, gyakorisági, relatív gyakorisági táblázatok készítése
* A valószínűség fogalmának bevezetése statisztikai alapon
* A klasszikus valószínűségi modell fogalma és alkalmazása
* Diszkrét valószínűség-eloszlások ábrázolása hagyományos és digitális eszközzel

### Fogalmak

valószínűségi kísérlet, esemény, elemi esemény, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség, diszkrét valószínűség-eloszlás

### Javasolt tevékenységek

* Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (például dobások szabályos dobókockákkal, pénzérmékkel); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; tippelés az egyes kimenetelekre és becslés a bekövetkezésük valószínűségére
* Játékokban a szerencsefaktor vizsgálata, például „Ki nevet a végén” játék esetében az első hatos dobás eloszlása
* Különböző társasjátékokban stratégia meghatározása, döntéshozatal esélylatolgatás alapján
* Különböző szerencsejátékok (lottó, totó, póker, black jack, internetes sportfogadások) esetében a nyerési esély összehasonlítása

Témakör: **Trigonometria**

óraszám: **20 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;
* alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban;
* a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
* kiszámítja háromszögek területét;
* ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
* átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense
* Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetekben
* Tompaszög szinusza, koszinusza, tangense
* Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
* Háromszög területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében
* Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével
* A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva
* Négyszögek és szabályos sokszögek területének kiszámítása

### Fogalmak

szinusz, koszinusz, tangens,

### Javasolt tevékenységek

* Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése
* Az iskolában vagy annak környezetében kijelölt, tetszőleges háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása csoportmunkában, távolságok és szögek mérése alapján
* Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában

11–12. évfolyam

A 11–12. évfolyamon a tanulási-tanítási folyamatra jellemző, hogy az ismeretek jellege egyre absztraktabb és formálisabb, a matematika belső logikája egyre jobban érvényesül. Ebben a szakaszban az egyik nagyon fontos didaktikai cél a szimbolikus gondolkodás fejlesztése. A tanulóknak a korábban elsajátított készségekre, képességekre és ismeretanyagra támaszkodva kell eljutniuk az absztrakt összefüggések megértéséhez és tudatos alkalmazásához. Tudatosítani kell a matematikai fogalmak pontos definiálásának fontosságát és a matematikai bizonyítások szerepét. Amellett, hogy a lehetséges alkalmazásokat minden egyes témakör kapcsán szem előtt kell tartani, fontos, hogy a tanulók lássák az egyes matematikai területek kapcsolatát is.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló a tanár által irányított módon, a feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok ebben a szakaszban is fejlesztik a matematikai kommunikációt. Az érettségi vizsgára készülés során egyre nagyobb hangsúlyt kap a tanulók önálló munkája mind a feladatmegoldásokban, mind a tanultak ismétlésében, rendszerezésében. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést, a felfedeztetést és a gyakorlást.

A 11–12. évfolyamon is jellemző, hogy a megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Bizonyos témakörök azonban ebben a szakaszban jelennek meg először. Ilyen a racionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény, a logaritmus, a számtani és mértani sorozatok, a trigonometria, a koordinátageometria és a térgeometria. Vannak olyan témakörök, amelyek ismeretei megjelennek más terület tanítása során is, ezért az egyes részekhez javasolt óraszámok ebben a szakaszban sem jellemeznek feltétlenül időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése, a trigonometria és a koordinátageometria alapjainak megjelenése, valamint a statisztikai és valószínűségi szemlélet mélyülése további lehetőségeket nyújt változatos hétköznapi és matematikai problémák megoldására. A matematikai eszköztár bővülése ebben a szakaszban teszi leginkább lehetővé, hogy a tanulók más tantárgyakban, más tanulási területeken is alkalmazni tudják matematikai tudásukat.

11. évfolyam

A témakörök áttekintő táblázata:

|  |  |
| --- | --- |
| **Témakör neve** | **Javasolt óraszám** |
| **Halmazok, matematikai logika** | 10 |
| **Kombinatorika, gráfok** | 15 |
| **Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése** | 12 |
| **Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus** | 25 |
| **Exponenciális folyamatok vizsgálata** | 12 |
| **Trigonometria** | 20 |
| **Koordinátageometria** | 25 |
| **Valószínűség-számítás** | 10 |
| **Év végi ismétlés** | 15 |
| **Összes óraszám:** | 144 |

Témakör: **Halmazok, matematikai logika**

óraszám: **10 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
* megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
* tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* A halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatok bemutatása példákon keresztül
* Logikai kifejezések megfelelő használata
* Egyszerű állítások indoklása, tételek bizonyítása
* Stratégiai és logikai játékok

### Fogalmak

logikai műveletek

### Javasolt tevékenységek

* A tanulók mindennapi tapasztalataihoz köthető, összetett állítások logikai értékének meghatározása igazságtáblázat segítségével
* Rejtvényújságokban szereplő feladványok megfejtése következtetések láncolatán keresztül
* Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
* Stratégiai játékok, például NIM játékok, táblás játékok
* Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

Témakör: **Kombinatorika, gráfok**

óraszám: **15 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
* a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
* a kiválasztott modellben megoldja a problémát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
* konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Matematikai és hétköznapi helyzetekhez kötődő sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása
* A binomiális együttható fogalmának ismerete, értékének kiszámítása
* Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül
* A gráf csúcsainak fokszámösszege és éleinek száma közötti összefüggés ismerete és alkalmazása gyakorlati feladatok megoldásában

### Fogalmak

faktoriális, binomiális együttható; csúcs fokszáma gráfban

### Javasolt tevékenységek

* Anagramma készítése a tanulók neveiből
* A pókerben előforduló lehetséges nyerő lapkombinációk számának meghatározása
* A Pascal-háromszög és tulajdonságai felfedeztetése például kéttagú összeg hatványaiban szereplő együtthatók segítségével
* Különböző szituációk kétféle módon történő összeszámlálása és ebből következő egyszerű kombinatorikus összefüggések felfedezése
* Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel konkrét lejátszása, a tapasztalatok összegyűjtése

Témakör: Számelméleti ismeretek, **számhalmazok épülése**

óraszám: **12 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismeri és alkalmazza az oszthatóság alapvető fogalmait;
* összetett számokat felbont prímszámok szorzatára;
* meghatározza két természetes szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, és alkalmazza ezeket egyszerű gyakorlati feladatokban;
* ismeri és alkalmazza az oszthatósági szabályokat;
* érti a helyi értékes írásmódot 10-es és más alapú számrendszerekben;
* ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
* ismer példákat irracionális számokra.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása a prímtényezős felbontásból
* Összetett oszthatósági szabályok alkalmazása
* Számolás osztási maradékokkal (például összeg, szorzat, hatvány maradéka)
* Számok felírása 10-estől különböző alapú számrendszerben
* Az egész számok, a véges tizedes törtek, a végtelen szakaszos tizedes törtek és a racionális számok kapcsolata
* A számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásai a természetes számoktól a valós számokig
* Végtelen nem szakaszos tizedes törtek ismerete
* Példák irracionális számokra
* Számhalmazok műveleti zártsága

### Fogalmak

természetes szám, egész szám, racionális szám, irracionális szám, valós szám, relatív prímek

### Javasolt tevékenységek

* Oszthatósággal kapcsolatos „bűvésztrükkök” bemutatása
* Számrendszerek segítségével megoldható rejtvények
* Tanulói kiselőadás a 10-estől különböző alapú számrendszerek használatáról a múltban és ennek mai napig tartó hatásairól
* Tanulói kiselőadás számelméleti érdekességekről, például tökéletes számok és barátságos számpárok, prímszámok, jelenleg ismert legnagyobb prím, titkosítás
* Halmazábra elkészítése a számhalmazokról

Témakör: **Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus**

óraszám: **25 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismeri és alkalmazza az n-edik gyök fogalmát;
* ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
* képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
* adott értékkészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Az n-edik gyök fogalmának ismerete és alkalmazása
* Hatványozás pozitív alap és racionális kitevő esetén
* Hatványozás azonosságainak alkalmazása racionális kitevő esetén
* A hatványozás szemléletes értelmezése irracionális kitevő esetén
* Az exponenciális függvények ábrázolása hagyományosan és számítógéppel, a függvények tulajdonságai
* A logaritmus értelmezése
* Áttérés más alapú logaritmusra
* Számológép használata logaritmus értékének meghatározásához

### Fogalmak

n-edik gyök, exponenciális függvény, logaritmus

### Javasolt tevékenységek

* A permanencia-elv gyakorlati „kipróbálása” a definíció megadása előtt
* Matematikatörténeti érdekességek (például déloszi probléma) feldolgozása projektmunkában
* Különböző alapú exponenciális függvények ábrázolása milliméterpapíron, és a kapott grafikonok összehasonlítása csoportmunkában
* Nagy számok számjegyei számának meghatározása logaritmus segítségével
* 10-estől eltérő alapú logaritmus kiszámolása csak 10-es alapú logaritmus kiszámolására alkalmas számológéppel

Témakör: Exponenciális folyamatok vizsgálata

óraszám: **12 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
* ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
* a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
* a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
* a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
* egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
* megold egyszerű, a megfelelő definíció alkalmazását igénylő exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket.

Témakör: **Trigonometria**

óraszám: **20 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;
* ismeri tompaszögek szögfüggvényeinek származtatását a hegyesszögek szögfüggvényei alapján;
* ismeri a hegyes- és tompaszögek szögfüggvényeinek összefüggéseit;
* alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban;
* a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
* kiszámítja háromszögek területét;
* ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
* átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense
* Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetekben
* Tompaszög szinusza, koszinusza, tangense
* Összefüggések ismerete egy adott szög különböző szögfüggvényei között: pitagoraszi összefüggés, pótszögek és mellékszögek szögfüggvényei
* Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
* Háromszög területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében
* Szinusz- és koszinusztétel ismerete és alkalmazása
* A szinusztétel bizonyítása
* Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével
* A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva
* Négyszögek és szabályos sokszögek területének kiszámítása

### Fogalmak

szinusz, koszinusz, tangens, szinusztétel, koszinusztétel

### Javasolt tevékenységek

* Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése
* Az iskolában vagy annak környezetében kijelölt, tetszőleges háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása csoportmunkában, távolságok és szögek mérése alapján
* Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában

Témakör: **Koordinátageometria**

óraszám: **25 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
* ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
* alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
* megad pontot és vektort koordinátáival a derékszögű koordináta-rendszerben;
* koordináta-rendszerben ábrázol adott feltételeknek megfelelő ponthalmazokat;
* koordináták alapján számításokat végez szakaszokkal, vektorokkal;
* ismeri és alkalmazza az egyenes egyenletét;
* egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére;
* kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében;
* megadja és alkalmazza a kör egyenletét a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében;
* felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* A vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor fogalmak ismerete, alkalmazása
* A vektorok összeadása, kivonása, szorzása valós számmal, műveletek ismerete és alkalmazása
* Vektorok alkalmazása feladatok megoldásában
* Pont és vektor megadása koordinátákkal a derékszögű koordináta-rendszerben
* Adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok ábrázolása koordináta-rendszerben
* Két pont távolságának, vektor abszolút értékének meghatározása koordináták alapján
* Vektorok összegének, különbségének, számszorosának koordinátái
* Szakaszfelezőpont koordinátáinak meghatározása a végpontok koordinátái alapján
* Egyenes egyenlete *y* = *mx* + *b* vagy *x* = *c* alakban
* Egyenes meredekségének fogalma; egyenesek merőlegességének és párhuzamosságának megállapítása a meredekségek alapján
* Az egyenesek egyenletének ismeretében egyenesek metszéspontjának koordinátái
* A kör egyenletének megadása és alkalmazása a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében

### Fogalmak

vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor, vektorok összege, vektorok különbsége, vektor számszorosa, vektor koordinátái, alakzat egyenlete, egyenes egyenlete, kör egyenlete

### Javasolt tevékenységek

* „Torpedójáték” koordináta-rendszerben
* Helymeghatározás térképen a szélességi és hosszúsági adatok segítségével
* Ház/lakás alaprajzának elkészítése koordináta-rendszerben, az eredeti adatok alapján
* Játék helyvektorokkal dinamikus geometriai szoftver használatával
* Gondolattérkép készítése a koordinátageometria kapcsolatainak bemutatására csoportos vagy egyéni munkaformában
* „Oroszlánfogás”: lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása grafikusan, digitális eszköz segítségével
* „Célba lövés”: játék körökkel a koordináta-rendszerben

Témakör: **Valószínűség-számítás**

óraszám: **10 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza;
* ismeri és alkalmazza a klasszikus valószínűségi modellt és a Laplace-képletet;
* ismeri és egyszerű esetekben alkalmazza a valószínűség geometriai modelljét;
* meghatározza a valószínűséget visszatevéses, illetve visszatevés nélküli mintavétel esetén.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Példák ismerete események összegére, szorzatára, komplementer eseményre, egymást kizáró eseményekre
* Elemi események fogalmának ismerete, alkalmazása események előállítására
* Példák ismerete független és nem független eseményekre
* A klasszikus valószínűségi modell és a Laplace-képlet ismerete, alkalmazása
* A geometriai valószínűség fogalmának ismerete és alkalmazása
* Valószínűségek meghatározása visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel esetén
* A várható érték ismerete és meghatározása konkrét feladatokban, játékokban
* Pénzügyi fogalmakkal kapcsolatos valószínűségi ismeretek (például biztosítás, befektetések kockázata, árfolyamkockázat)

### Fogalmak

események összege, események szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események, geometriai valószínűség, visszatevéses mintavétel, visszatevés nélküli mintavétel, várható érték

### Javasolt tevékenységek

* Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (pl. szabályos dobókockákkal, pénzérmékkel dobálás); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; becslés az egyes kimenetelek, illetve összetett események valószínűségére csoportmunkában
* Példák keresése független és nem független, illetve egymást kizáró eseményekre csoportmunkában
* Orvosi tesztek eredményének esélyelemzése fagráf segítségével
* Egyszerű valószínűségi játékokhoz kapcsolódóan a várható nyeremény és az igazságosság fogalmának kialakítása
* Konkrét bank konkrét befektetési portfóliójának értelmezése, elemzése
* Néhány konkrét biztosítási ajánlat értelmezése, elemzése

12. évfolyam

A témakörök áttekintő táblázata:

|  |  |
| --- | --- |
| **Témakör neve** | **Javasolt óraszám** |
| **Sorozatok** | 25 |
| **Térgeometria** | 30 |
| **Leíró statisztika** | 15 |
| **Rendszerező összefoglalás** | 54 |
| **Összes óraszám:** | 124 |

Témakör: **Sorozatok**

óraszám: **25 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* számtani és mértani sorozatokat adott szabály alapján felír, folytat;
* a számtani/mértani sorozat n-edik tagját felírja az első tag és a különbség (differencia)/hányados (kvóciens) ismeretében;
* a számtani/mértani sorozatok első n tagjának összegét kiszámolja;
* ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát;
* mértani sorozatokra vonatkozó ismereteit használja gazdasági, pénzügyi, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* A számsorozat fogalmának ismerete
* Számsorozat megadása képlettel, rekurzióval
* Számtani és mértani sorozatok felírása, folytatása adott szabály szerint
* Számtani sorozat, az n-edik tag, az első n tag összege
* Mértani sorozat, az n-edik tag, az első n tag összege
* A számtani és a mértani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet bizonyítása
* Számtani és mértani sorozatokra vonatkozó ismeretek alkalmazása gazdasági, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában
* Megtakarítási és kamatozási formák, ezek összehasonlítása
* Egyszerű kamat, kamatos kamat, gyűjtőjáradék és törlesztőrészlet számítása
* Megtakarítási, befektetési és hitelfelvételi lehetőségekkel és azok kockázati tényezőivel kapcsolatos feladatok megoldása

### Fogalmak

számsorozat, tőke, kamatláb, kamat, futamidő, gyűjtőjáradék, törlesztőrészlet

### Javasolt tevékenységek

* Tanulói kiselőadás tartása nevezetes sorozatokról, például Fibonacci-sorozat
* Az első 100 pozitív természetes szám összegének meghatározása a „kis” Gauss módszerével
* A sakktáblára elhelyezett, mezőről mezőre kétszeres számú búzaszemek kérdésének bemutatása
* Valódi pénzügyi termékek kamatozási és egyéb feltételeinek összehasonlítása csoportmunkában internetes adatgyűjtés segítségével

Témakör: **Térgeometria**

óraszám: **30 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
* ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
* ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
* sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
* ismeri és alkalmazza a hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságait;
* lerajzolja a kocka, téglatest, egyenes hasáb, egyenes körhenger, egyenes gúla, forgáskúp hálóját;
* kiszámítja a speciális testek felszínét és térfogatát egyszerű esetekben;
* ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket;
* ismeri és alkalmazza a hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételeket.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Térelemek kölcsönös helyzetének, távolságának és hajlásszögének ismerete, alkalmazása feladatmegoldásban
* A terület, térfogat, űrtartalom mértékegységeinek és ezek átváltási szabályainak ismerete
* Sűrűség mértékegységei közötti átváltás ismerete
* Sík- és térgeometriai feladatoknál a válasz megadása a problémának megfelelő mértékegységben
* A hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságainak ismerete és alkalmazása a hétköznapi életben előforduló testekkel kapcsolatban
* A kocka, a téglatest, az egyenes hasáb, az egyenes körhenger, az egyenes gúla és a forgáskúp hálójának lerajzolása konkrét esetekben
* A mindennapi életben előforduló hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp alakú tárgyak felszínének és térfogatának meghatározása méréssel és számítással
* Síkidomok forgatásával keletkező egyszerű, a mindennapi életben is előforduló testek felszínének és térfogatának kiszámítása
* A hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása
* A hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása

### Fogalmak

kocka, téglatest, hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp, egyenes test, forgástest, n-oldalú szabályos gúla, tetraéder, alaplap, oldallap, alapél, oldalél, alkotó, palást, testmagasság, test hálója

### Javasolt tevékenységek

* Hétköznapi tárgyak (üdítősdoboz, vizesflakon, tejfölösdoboz stb.) térfogatának megállapítása méréssel, a kapott eredmény összehasonlítása a tárgyon szereplő értékkel
* A Louvre bejárataként épített üvegpiramis földfelszín feletti térfogatának és az üvegfelület felszínének meghatározása (szükséges adatok gyűjtése az internetről)
* Annak becslése csoportmunkában, hogy a teret milyen arányban tudjuk kitölteni egybevágó érintkező gömbökkel különböző elrendezések esetén
* Különböző méretű, megközelítőleg gömb alakú gyümölcsök térfogatának és felszínének becslése, a becslés ellenőrzése méréssel
* A Föld felszínének és térfogatának közelítése földgömbmodellen méréssel és számolással, majd a kapott értékek összevetése a hivatalos adatokkal
* Projektmunka a gömbről: hogyan jelenik meg a gömb a mindennapi életben, a többi tantárgyban és a matematikában; a gömbi geometria alapjai

Témakör: **Leíró statisztika**

óraszám: **15 óra**

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
* hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
* ismeri és alkalmazza a sodrófa (box-plot) diagramot adathalmazok jellemzésére, összehasonlítására;
* felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

* A reprezentatív minta fogalmának szemléletes ismerete
* Hétköznapi, társadalmi problémákhoz kapcsolódó statisztikai adatok tervszerű gyűjtése
* Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése kvartilisekkel, középértékekkel és szóródási mutatókkal
* Sodrófa (box-plot) diagram készítése, alkalmazása
* A kapott adatok értelmezése, értékelése, statisztikai következtetések
* Nagy adathalmazok kezelése táblázatkezelő programmal
* Grafikus és szöveges statisztikai manipulációk felismerése

### Fogalmak

reprezentatív minta, sodrófa (box-plot) diagram, minimum, maximum, kiugró adat, kvartilisek, terjedelem, szórás

### Javasolt tevékenységek

* Példák reprezentatív és nem reprezentatív mintavételre
* Szavazások szimulálása és különböző szavazatértékelő rendszerek vizsgálata iskolai körülmények között
* A Simpson-paradoxon bemutatása példákon
* Az interneten található, megbízható forrásból (pl. KSH honlapja) származó statisztikák értelmezése, elemzése, lehetséges következtetések megfogalmazása
* Különböző forrásokból származó adathalmazok statisztikai elemzése, értékelése, ezekből valamilyen adott szempont alapján manipulatív és nem manipulatív diagram készítése